

deo13.gr

1^η Εργασία ΔΕΟ 13
2014-2015

Υποδειγματική λύση

(όπως θα παρατηρήσετε η εργασία περιέχει και κάποια επιπλέον σχόλια, για την καλύτερη κατανόηση της μεθοδολογίας, τα οποία φυσικά μπορούν να παραλειφθούν)

Άσκηση 1

1)

Τα σημεία τομής μίας συνάρτησης με τον $x'x$ είναι σημεία της μορφής $(x,0)$, ενώ το σημείο τομής με τον $y'y$ (μοναδικό) είναι της μορφής $(0,y)$. Συνεπώς για να βρούμε τα σημεία τομής με τον $x'x$ λύνουμε την εξίσωση $y=0$, ενώ για να βρούμε το σημείο τομής με τον $y'y$ λύνουμε την εξίσωση $x=0$.

$$\text{Για } Y=0 \text{ είναι: } 120 - 6X = 0 \Leftrightarrow 6X = 120 \Leftrightarrow \frac{6X}{6} = \frac{120}{6} \Leftrightarrow X = 20$$

Άρα το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $Y = 120 - 6X$ με τον άξονα $x'x$ είναι το $(20,0)$.

$$\text{Για } X=0 \text{ είναι: } Y = 120 - 6 \cdot 0 = 120$$

Άρα το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $Y = 120 - 6X$ με τον άξονα $y'y$ είναι το $(0,120)$.

2)

Για να βρούμε τα σημεία τομής δύο συναρτήσεων $y=A(x)$ και $y=B(x)$ λύνουμε την εξίσωση: $A(x)=B(x)$ από την οποία βρίσκουμε τα x , δηλαδή την τετμημένη κάθε σημείου. Έπειτα αντικαθιστούμε το x σε μία από τις δύο εξισώσεις και βρίσκουμε και το αντίστοιχο y , δηλαδή την τεταγμένη του σημείου.

$$\text{Είναι: } 120 - 6X = 40 + 4X \Leftrightarrow 10X = 80 \Leftrightarrow \frac{10X}{10} = \frac{80}{10} \Leftrightarrow X = 8$$

$$\text{Για } X=8 \text{ είναι: } Y = 40 + 4 \cdot 8 = 72$$

Άρα το σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων είναι το $(8,72)$.

3)

Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο (x_0, y_0) και έχει συντελεστή διεύθυνσης (κλίση) λ είναι: $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$

Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $(4, 10)$ και έχει κλίση 3,5 είναι:

$$y - 10 = 3,5(x - 4) \Leftrightarrow y - 10 = 3,5x - 14 \Leftrightarrow y = 3,5x - 4$$

Τα σημεία τομής της εξίσωσης με τους άξονες είναι:

Για $y = 0$ είναι: $0 = 3,5x - 4 \Leftrightarrow 3,5x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3,5} \approx 1,143$

Άρα το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της εξίσωσης $y = 3,5x - 4$ με τον άξονα $x'x$ είναι το $(1,143, 0)$.

Για $x = 0$ είναι: $y = 3,5 \cdot 0 - 4 \Leftrightarrow y = -4$

Άρα το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της εξίσωσης $y = 3,5x - 4$ με τον άξονα $y'y$ είναι το $(0, -4)$.

4)

Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία (x_1, y_1) και (x_2, y_2) είναι:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $(4, 1,5)$ και $(2, 5)$ είναι:

$$y - 1,5 = \frac{5 - 1,5}{2 - 4}(x - 4) \Leftrightarrow y - 1,5 = -\frac{3,5}{2}(x - 4) \Leftrightarrow y = -\frac{3,5}{2}x + 8,5$$

Άσκηση 2

1)

Εξισώσεις όπως αυτή καλούνται κλασματικές αλγεβρικές εξισώσεις (ή ρητές εξισώσεις)

Για να λυθούν, ανάγονται σε ισοδύναμες εξισώσεις δίχως τους παρονομαστές.

Αυτό γίνεται ως εξής:

$$\frac{1}{x-2} - \frac{x+2}{x-1} = \frac{2x+5}{x^2-3x+2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{x-2} - \frac{x+2}{x-1} = \frac{2x+5}{(x-2)(x-1)} \Leftrightarrow$$

$$(x-2)(x-1) \left[\frac{1}{x-2} - \frac{x+2}{x-1} \right] = (x-2)(x-1) \frac{2x+5}{(x-2)(x-1)}, \quad x \neq 1, 2 \Leftrightarrow$$

$$x-1 - (x-2)(x+2) = 2x+5 \Leftrightarrow$$

$$x-1 - (x^2-4) = 2x+5 \Leftrightarrow$$

$$-x^2 + 4 - 1 + x - 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + x + 2 = 0$$

Η τελευταία εξίσωση είναι ένα τριώνυμο δευτέρου βαθμού με διακρίνουσα:

$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 - 8 = -7 < 0$. Άρα η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

2)

Η συνάρτηση είναι μία παραβολή και αφού ο συντελεστής του x^2 είναι:

$\alpha = -1 < 0$ η συνάρτηση θα παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο με συντεταγμένες:

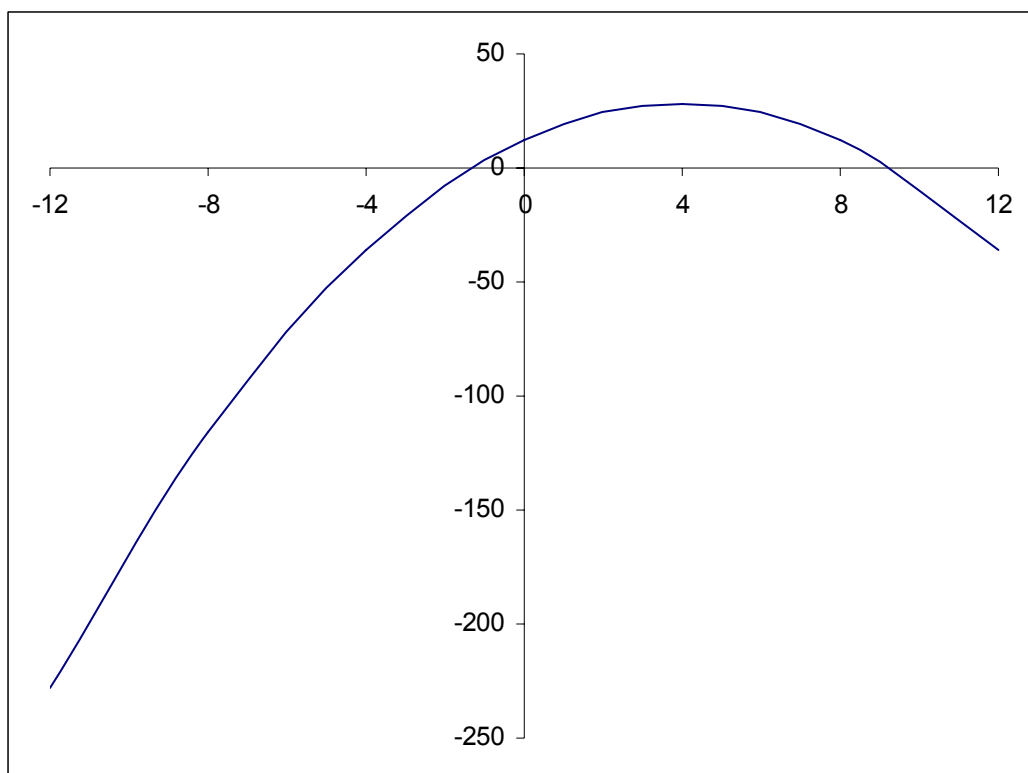
$$(x_0, y_0) = \left(\frac{-\beta}{2\alpha}, \frac{-\Delta}{4\alpha} \right) = \left(\frac{-8}{-2}, \frac{4(-1)12-8^2}{4(-1)} \right) = (4, 28)$$

Άρα η συνάρτηση παρουσιάζει στο σημείο $(4, f(4)) = (4, 28)$ μέγιστο.

Η ζητούμενη γραφική παράσταση είναι η:

Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές και βρίσκουμε το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο. Πολλαπλασιάζουμε με το Ε.Κ.Π. και τα δύο μέλη της εξίσωσης για να απαλείψουμε τους παρονομαστές παίρνοντας ταυτόχρονα περιορισμούς (το x δεν μπορεί να πάρει τιμή που να μηδενίζει κάποιον παρονομαστή της αρχικής εξίσωσης).

Πλέον, λύνουμε την εξίσωση όπως ξέρουμε.



3)

Το σημείο ισορροπίας της συνάρτησης προσφοράς και της συνάρτησης ζήτησης είναι το σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων, συνεπώς θα βρεθεί με τον ίδιο τρόπο που δουλέψαμε στην άσκηση 1 (β).

Είναι:

$$\frac{5p-7}{3} = \frac{-12q+39}{9} \Leftrightarrow \frac{5p-7}{3} = \frac{-4q+13}{3} \Leftrightarrow 5p-7 = -4q+13 \Leftrightarrow p = -\frac{4}{5}q + 4$$

και:

$$\frac{2q+5}{7} = \frac{6p-2}{14} \Leftrightarrow \frac{2q+5}{7} = \frac{3p-1}{7} \Leftrightarrow 2q+5 = 3p-1 \Leftrightarrow p = \frac{2}{3}q + 2$$

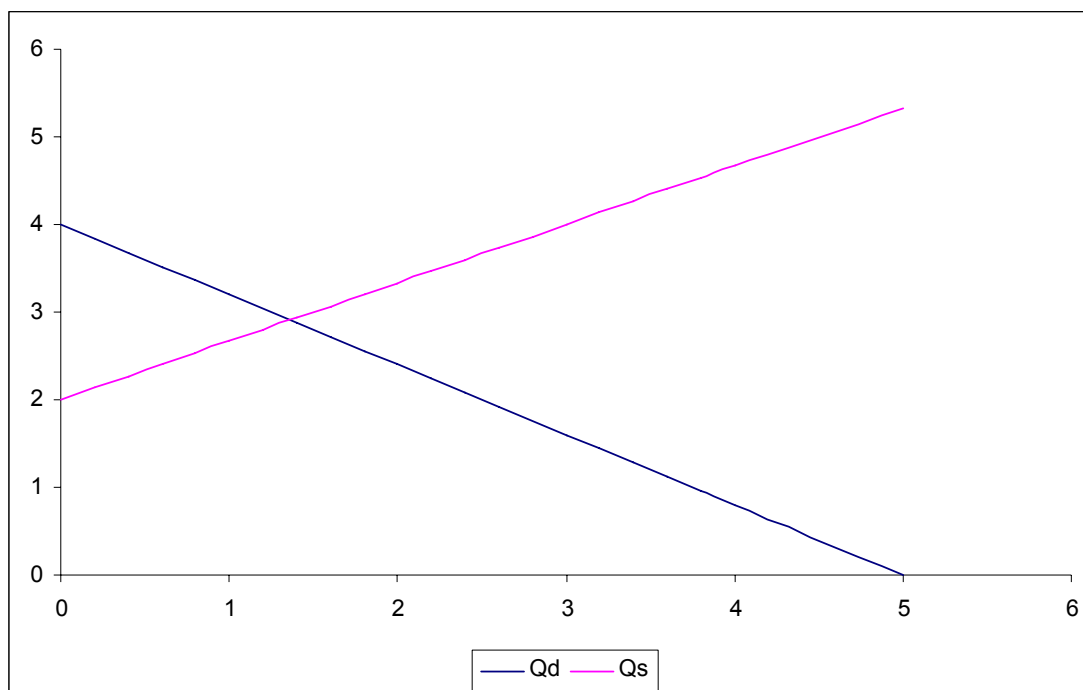
Άρα, στο σημείο ισορροπίας θα ισχύει:

$$\frac{2}{3}q + 2 = -\frac{4}{5}q + 4 \Leftrightarrow \frac{2}{3}q + \frac{4}{5}q = 2 \Leftrightarrow \frac{10}{15}q + \frac{12}{15}q = 2 \Leftrightarrow \frac{22}{15}q = 2 \Leftrightarrow q = \frac{15}{11}$$

και με αντικατάσταση σε μία από τις δύο εξισώσεις παίρνουμε:

$$p = \frac{2}{3} \cdot \frac{15}{11} + 2 = \frac{10}{11} + 2 = \frac{32}{11}.$$

Άρα το σημείο ισορροπίας είναι το $(q, p) = \left(\frac{15}{11}, \frac{32}{11}\right)$



Άσκηση 3

α)

Όταν το αγαθό διανέμεται δωρεάν θα είναι: $P=0$ οπότε με αντικατάσταση στη συνάρτηση ζήτησης βρίσκουμε ότι η ζήτηση του αγαθού θα είναι:

$$Q_d = -0,6 \cdot 0^2 + 60 = 60$$

Για να βρούμε την τιμή για την οποία η ζήτηση του αγαθού θα είναι μηδενική, θέτουμε $Q_d=0$ στη συνάρτηση ζήτησης και βρίσκουμε:

$$0 = -0,6 \cdot P^2 + 60 \Leftrightarrow 0,6 \cdot P^2 = 60 \Leftrightarrow P^2 = 100 \Leftrightarrow P = \pm 10 \xRightarrow{P \geq 0} P = 10$$

β)

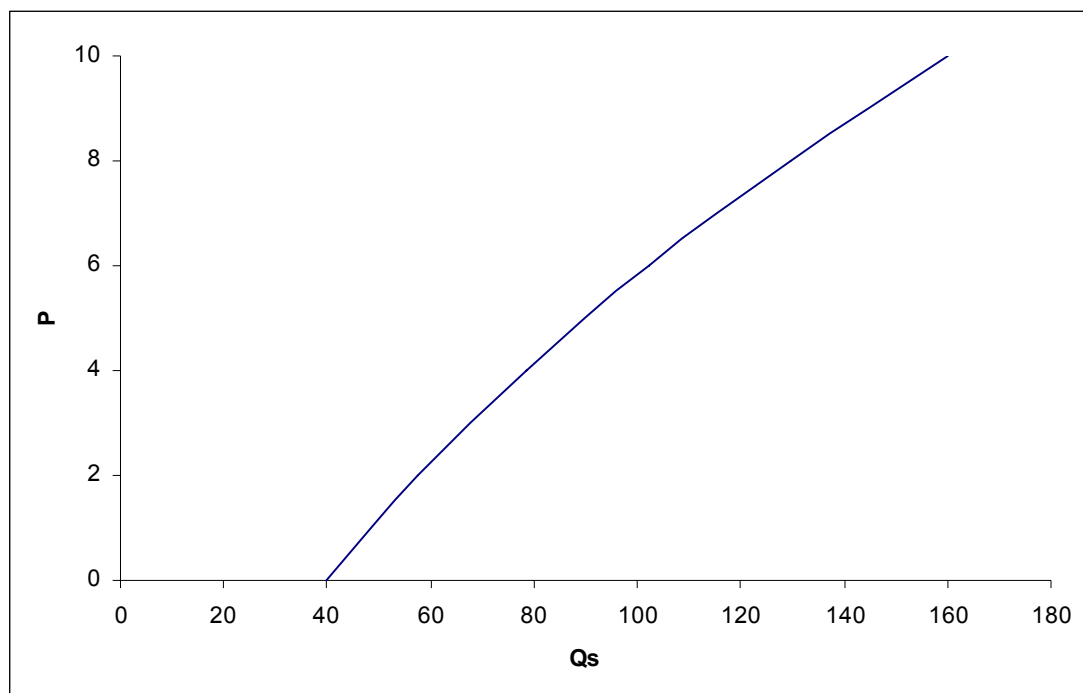
Πρέπει:

$$Q_d \geq 0 \Leftrightarrow -0,6 \cdot P^2 + 60 \geq 0 \Leftrightarrow P^2 - 100 \leq 0 \Leftrightarrow P^2 - 10^2 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$(10 - P)(10 + P) \leq 0 \Leftrightarrow -10 \leq P \leq 10$$

και επειδή επιπλέον πρέπει $P \geq 0$, τελικά το πεδίο ορισμού θα είναι το $[0, 10]$.

γ)



Όπως είναι φυσικό, αύξηση της τιμής του αγαθού οδηγεί στην παραγωγή μεγαλύτερης ποσότητας.

δ)

Η τιμή και η ποσότητα ισορροπίας θα είναι το σημείο τομής της καμπύλης ζήτησης και προσφοράς, συνεπώς:

$$Q_S = Q_d \Leftrightarrow 0,4P^2 + 8P + 40 = -0,6P^2 + 60 \Leftrightarrow P^2 + 8P - 20 = 0$$

Το τριώνυμο $P^2 + 8P - 20$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-20) = 64 + 80 = 144 > 0 \text{ και ρίζες:}$$

$$P_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{144}}{2} = \frac{-8 \pm 12}{2} \Rightarrow P_1 = \frac{-8 + 12}{2} = \frac{4}{2} = 2 > 0 \text{ (δεκτή λύση) και}$$

$$P_2 = \frac{-8 - 12}{2} = \frac{-20}{2} = -10 < 0 \text{ (απορρίπτεται).}$$

Άρα η τιμή ισορροπίας θα είναι η $P = 2$ και με αντικατάσταση σε οποιαδήποτε από τις δύο συναρτήσεις βρίσκουμε ότι η ποσότητα ισορροπίας θα είναι:

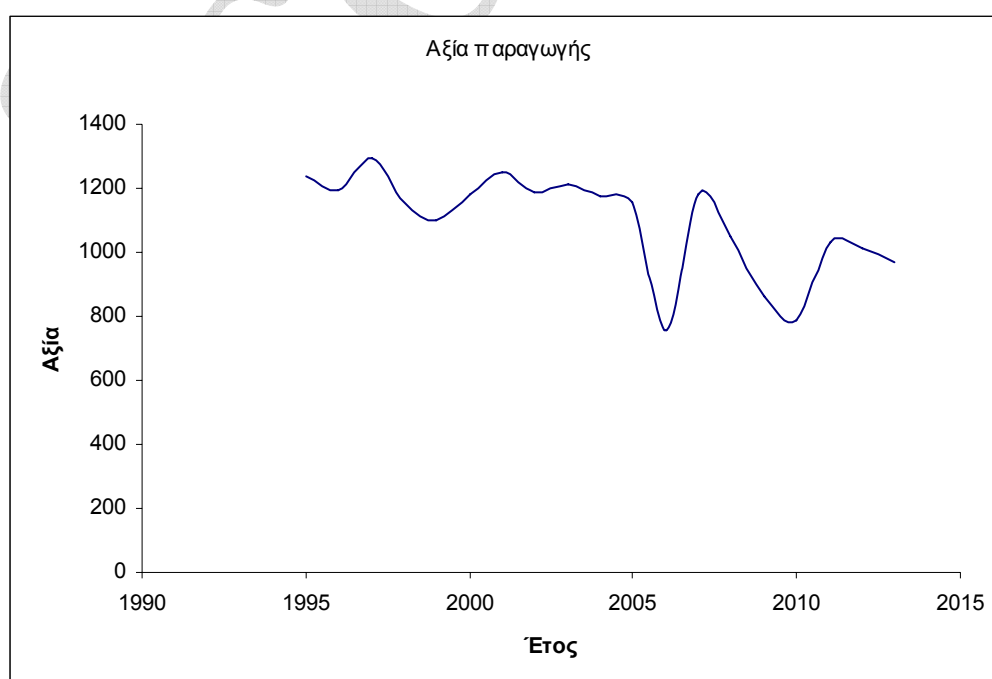
$$Q = 0,4 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 + 40 = 1,6 + 16 + 40 = 57,6$$

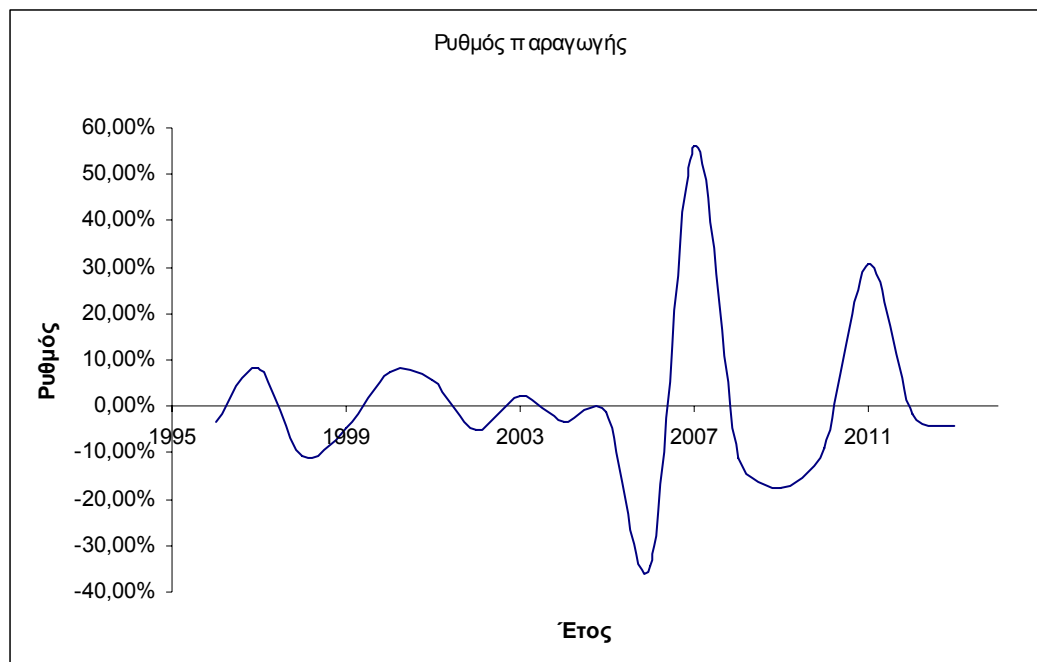
Άσκηση 4

α - β)

Greece	Greece % annual difference	
1236,69		
1195,08	-3,36%	-
1293,55	8,24%	+
1153,14	-10,85%	-
1101,37	-4,49%	-
1180,95	7,23%	+
1247,18	5,61%	+
1185,67	-4,93%	-
1213,04	2,31%	+
1172,04	-3,38%	-
1155,81	-1,38%	-
756,6	-34,54%	-
1181,43	56,15%	+
1049,82	-11,14%	-
865,44	-17,56%	-
787,03	-9,06%	-
1028,71	30,71%	+
1011,39	-1,68%	-
967,28	-4,36%	-

γ)





δ)

GEO/ TIME	European Union (15 countries)	Germany	Germany % of EU	Ireland	Ireland % of EU	Greece	Greece % of EU	Spain	Spain % of EU	France	France % of EU	Netherlands	Netherlands % of EU	Finland	Finland % of EU
1995	35002,21	7324,56	20,93%	290,78	0,83%	1236,69	3,53%	2738,18	7,82%	9774,63	27,93%	239,17	0,68%	586,29	1,68%
1996	39251,79	7801,85	19,88%	328,57	0,84%	1195,08	3,04%	4324,07	11,02%	10667,66	27,18%	250,03	0,64%	647,3	1,65%
1997	37554,77	7692,16	20,48%	310,38	0,83%	1293,55	3,44%	3751,59	9,99%	10215,41	27,20%	200,83	0,53%	641,83	1,71%
1998	35607,46	7167,51	20,13%	278,23	0,78%	1153,14	3,24%	3980,48	11,18%	10128,2	28,44%	186,06	0,52%	498,81	1,40%
1999	34175,64	7027,32	20,56%	296,21	0,87%	1101,37	3,22%	3464,32	10,14%	9755,8	28,55%	181	0,53%	510,8	1,49%
2000	36551,66	7615,91	20,84%	327,16	0,90%	1180,95	3,23%	4316,36	11,81%	9781,3	26,76%	234	0,64%	706,3	1,93%
2001	35871,09	8140,23	22,69%	339,38	0,95%	1247,18	3,48%	3786,05	10,55%	9660	26,93%	240,81	0,67%	655	1,83%
2002	36025,27	7073,74	19,64%	289,24	0,80%	1185,67	3,29%	4093,4	11,36%	10185,1	28,27%	257,71	0,72%	666,8	1,85%
2003	34754,6	6946,94	19,99%	342,33	0,98%	1213,04	3,49%	4190,64	12,06%	9669,8	27,82%	282,08	0,81%	640,2	1,84%
2004	37865,61	7927,28	20,94%	347,59	0,92%	1172,04	3,10%	4652,84	12,29%	10142	26,78%	174,83	0,46%	612,1	1,62%
2005	26374,69	4216,81	15,99%	187,57	0,71%	1155,81	4,38%	3101,1	11,76%	9385,4	35,58%	166,52	0,63%	652,4	2,47%
2006	25609,72	4706,85	18,38%	220,84	0,86%	756,6	2,95%	2906,67	11,35%	8271,9	32,30%	196,2	0,77%	437,4	1,71%
2007	38263,82	7085,87	18,52%	341,52	0,89%	1181,43	3,09%	5322,15	13,91%	11854,2	30,98%	265,52	0,69%	715,6	1,87%
2008	37531,47	8203,66	21,86%	279,85	0,75%	1049,82	2,80%	4234,71	11,28%	10760,4	28,67%	289,83	0,77%	590,2	1,57%
2009	26496,54	5360	20,23%	158,19	0,60%	865,44	3,27%	2832,55	10,69%	8452,9	31,90%	207,22	0,78%	416	1,57%
2010	33770,06	6440	19,07%	274,09	0,81%	787,03	2,33%	3679,61	10,90%	11743,3	34,77%	266,32	0,79%	466,5	1,38%
2011	39454,19	8161	20,68%	382,73	0,97%	1028,71	2,61%	4449,25	11,28%	11883,9	30,12%	283,62	0,72%	630,6	1,60%
2012	44545,79	8995	20,19%	454,66	1,02%	1011,39	2,27%	4059,48	9,11%	15370,9	34,51%	402,54	0,90%	767,3	1,72%
2013	37566,12	7459,14	19,86%	315,71	0,84%	967,28	2,57%	4340,64	11,55%	11776,2	31,35%	318,31	0,85%	717,4	1,91%

ε)

